UNIVERSITE IBN TOFAIL
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
Cycle Intégré Préparatoire aux Formations d'Ingénieurs
Année Universitaire 2012/2013

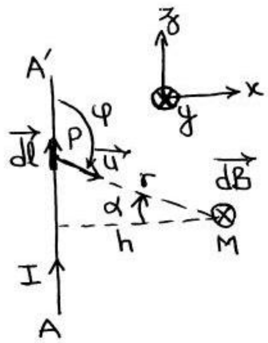
Physique 3 : Électromagnétisme

Solution du Devoir libre N° 1 : Loi de Biot et Savart

Exercice 1.3. (Exercice supplémentaire)

1.3.1. Loi de Biot et Savart

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$



1.3.2. $\overrightarrow{dl} \wedge \vec{u} = dz\, \vec{e}_z \wedge \vec{u}$

$= dz \sin\varphi\, \vec{e}_y$

$= dz \cos\alpha\, \vec{e}_y \quad \left(\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow r = \frac{h}{\cos\alpha}$

et $tg\alpha = \frac{z}{h} \Rightarrow z = h\, tg\alpha \Rightarrow dz = \frac{h}{\cos^2\alpha} d\alpha$

Donc : $\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h} \cos\alpha\, d\alpha\, \vec{e}_y$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)\vec{e}_y}$$

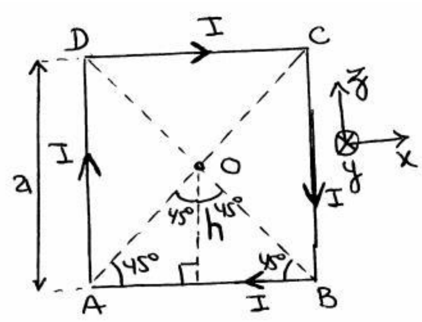
1.3.3. si le fil est infini : $\alpha_1 \to -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 \to +\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$

1.3.4.

Le champ crée au centre O est la somme des champs de chaque coté : principe de supperposition.

$\vec{B} = 4\,\vec{B}_{(AB)}$



Calcul de $\vec{B}_{(AB)}$: d'après la question 1.3.2 :

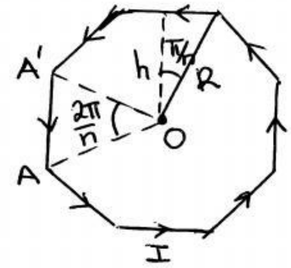
$\vec{B}_{(AB)}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\left[\sin 45° - \sin(-45°)\right]\vec{e}_y$

$tg(45°) = \frac{h}{a/2} \Rightarrow h = \frac{a}{2} tg(45°) = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \vec{B}_{(AB)}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{e}_y$ D'ou $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{2\mu_0 I}{\pi a}\vec{e}_y}$

1.3.6.

De la même façon, on utilisera le principe de supperposition :



$$\vec{B}(O) = n\,\vec{B}_{(AA')}(O)$$

$$B_{(AA')}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{h}{R} \Rightarrow h = R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

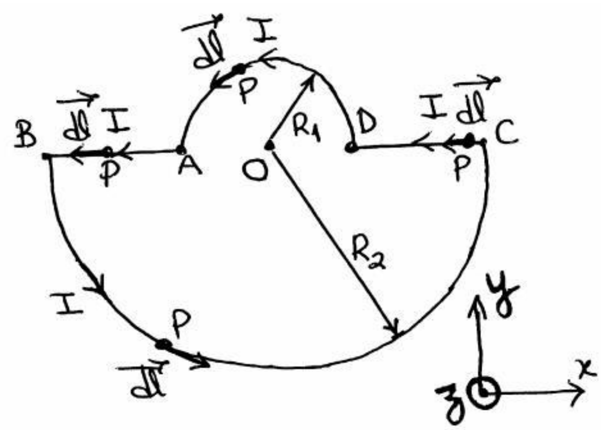
donc : $B_{(AA')}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right]$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[tg\left(\frac{\pi}{n}\right) + tg\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

D'ou : $B_{(AA')}(O) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Donc : $\boxed{B(O) = \frac{n\mu_0 I}{2\pi R}\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

Exercice 1.4. (Exercice supplémentaire)



* Soit $\vec{dl}$ l'élement le long du circuit dans le sens de I.

La loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PC}\|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\underbrace{\int_A^B \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{\substack{=0 \\ (\vec{dl}\,//\,\vec{PO})}} + \int_B^C \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3} + \underbrace{\int_C^D \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{\substack{=0 \\ (\vec{dl}\,//\,\vec{PO})}} + \int_D^A \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}\right]$$

entre B et C : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = dl \cdot PO(\vec{e_z}) = R_2\, dl\, \vec{e_z}$ $(PO = R_2)$

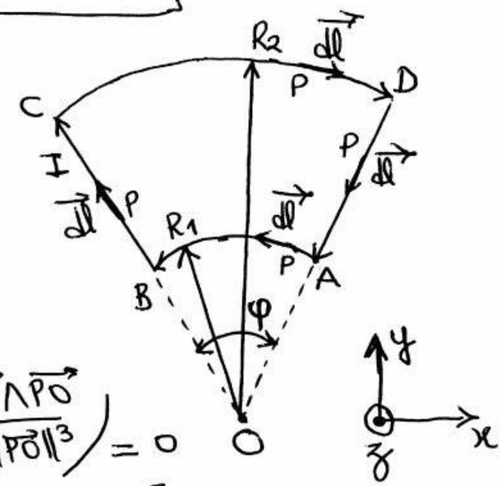
D et A : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = dl \cdot PO(\vec{e_z}) = R_1\, dl\, \vec{e_z}$ $(PO = R_1)$

$$\Rightarrow \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_B^C \frac{dl}{R_2^2} + \int_D^A \frac{dl}{R_1^2}\right]\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\pi R_2}{R_2^2} + \frac{\pi R_1}{R_1^2}\right)\vec{e_z}$$

D'où $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4 R_1 R_2}(R_1 + R_2)\vec{e_z}}$

* La loi de Biot et Savart :



$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}$$

$$\vec{B}(O) = \int d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}$$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_A^B \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3} + \underbrace{\int_B^C \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{=0} + \int_C^D \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3} + \underbrace{\int_D^A \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PO}}{\|\vec{PO}\|^3}}_{=0}\right]$$

entre A et B : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = R_1\, dl\, \vec{e_z}$

C et D : $\vec{dl} \wedge \vec{PO} = -R_2\, dl\, \vec{e_z}$

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_A^B \frac{dl}{R_1^2} - \int_C^D \frac{dl}{R_2^2}\right]\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1^2}\int R_1 d\varphi - \frac{1}{R_2^2}\int R_2 d\varphi\right)\vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{\varphi}{R_1} - \frac{\varphi}{R_2}\right]\vec{e_z} = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R_1 R_2}(R_2 - R_1)\vec{e_z}$$

D'où : $\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R_1 R_2}(R_2 - R_1)\vec{e_z}}$